ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES N° 2

Option Physique

(GROUPE B)

Une fonction réelle f d'une variable réelle x, définie sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, fini ou non, est dite absolument monotone (A.M.) sur $]a, b[$, si elle est indéfiniment dérivable sur $]a, b[$, et si l'on a pour tout $x \in]a, b[$ $f(x) \geqslant 0$ et $f^{(n)}(x) \geqslant 0$; $f^{(n)}(x)$ étant la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x)$, n entier supérieur ou égal à 1.

I

1° Montrer que la somme et le produit de deux fonctions A.M. (définies sur le même intervalle) est A.M.

2° Montrer que si la fonction $f(x)$ est A.M. sur $]a, b[$ la fonction $e^{f(x)}$ est A.M. sur $]a, b[$.

3° Montrer que la fonction $-\operatorname{Log}(-x)$ est A.M. sur $]-1, 0[$.

4° On considère la fonction $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in]0,1[$.

Former l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par y et l'utiliser pour démontrer que $y(x)$ est A.M.

Montrer que Arc Sin x est A.M. sur $]0.1[$.

5° Dans le cas où a et b sont finis, montrer qu'une fonction A.M. sur $]a, b[$ peut être prolongée sur $[a, b[$ en une fonction admettant des dérivées à droite de tous les ordres en a, toutes ces dérivées étant positives ou nulles.

Que peut-on dire au point b?

II

On suppose dorénavant que a est fini et que $a < 0 < b$.

1° Soit g une fonction indéfiniment dérivable sur $]a, b[$.

Démontrer, par récurrence sur l'entier n, la formule suivante :

$\forall y \in]a, b[$

$$g(y) = g(0) + \frac{y}{1!}g'(0) + \ldots + \frac{y^n}{n!}g^{(n)}(0) + \int_0^y \frac{(y-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\,dt.$$

(on pourra utiliser une intégration par parties).

2° f est une fonction définie et A.M. sur $]a, b[$.

Soit $\quad R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$.

α. Montrer que pour n fixé, le rapport $\dfrac{R_n(x)}{x^n}$ tend vers une limite quand x tend vers 0 et est une fonction croissante de x sur $[0, b[$.

β. En déduire que la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge vers $f(x)$ pour $x \in [0, b[$.

γ. Si $c = \inf\big((-a), b\big)$, montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge vers $f(x)$ sur $]-c, +c[$.

3° D'après le 1-5° f peut être prolongée en une fonction $\tilde{f}$ sur $[a, b[$ indéfiniment dérivable sur $[a, b[$.

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tilde{f}^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ converge vers $\tilde{f}(x)$ sur $[a, b[$.

4° Montrer que si $f(x_0) = 0$ avec $a < x_0 < b$ on a $f(x) = 0$ sur $]a, b[$.

On suppose qu'il existe un entier p, et un réel $x_0 \in]a, b[$, tels que $f^{(p)}(x_0) = 0$. Que peut-on dire de f ?

5° Montrer que si $b = +\infty$, ou bien f est un polynôme ou bien pour tout entier K $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^K} = +\infty$.

6° Soit une suite $\{f_n\}$ $(n \in \mathbf{N})$ de fonctions A.M. sur $]a, b[$. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge pour tout $x \in]a, b[$.

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ converge pour tout $x \in]a, b[$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail